Le 26 mai 2020

Chers élèves de 5A-B-D,

J'espère à nouveau que mon message vous trouve en bonne santé vous et votre famille.

J'ai complété les exemples d'introduction de la page 2 (dernier document que je vous ai envoyé) qu'il vous reste à recopier dans votre cours et j'ai résolu certains des exercices de 1. à 9. afin que vous puissiez résoudre les exercices que je vous ai laissé et vous lancer dans la résolution des suivants (jusqu'au 14.)

Vous verrez qu'il est important de savoir dériver une fonction et mis à part quelques élèves qui m'ont envoyé leur travail sur les dérivées, je crains que cela ne soit difficile pour les autres si vous ne maitrisez pas ce qui précède. Je vous ai invité plusieurs fois à m'envoyer du travail mais c'est très difficile de vous obliger si vous n'en voyez pas l'utilité donc c'est vous qui choisissez pour votre avenir.

Je vous ferai parvenir début de semaine prochaine la suite du cours à savoir le rôle de la dérivée seconde et il nous restera alors à regrouper toutes nos connaissances depuis janvier pour réaliser l'étude graphique d'une fonction.

Je souhaite à ceux qui lisent mes mails un bon travail et du courage car je sais que c'est très difficile pour vous comme pour moi de travailler comme cela. C'est maintenant que l'on se rend compte qu'un professeur en chair et en os est utile et qu'il sera difficilement remplaçable par un robot qui lit ses notes comme en rêverait peut –être ceux qui voudraient faire des économies en les supprimant. Méditez cela !!!!

Bonne journée

M.Bottin

5. Rôle de la dérivée première page 2

5.1 a)

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Variations f		$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$	
Signe f'		$+$	0	$-$	0	$+$	

$G_{f'}$ est au-dessus de ox ds $]-\infty;1]$ — $G_{f'}$ est en-dessous de ox ds $[1;3]$ — $G_{f'}$ est au-dessus de ox ds $[3;+\infty[$

b)

x	$-\infty$		-5		-1		$+\infty$
Variation f		$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	
Signe f'		$-$	0	$+$	0	$-$	

c) On constate que lorsque f est croissante alors $f'(x) \geq 0$
f est décroissante alors $f'(x) \leq 0$

Le graphique de f admet un $\begin{cases}\text{maximum}\\ \text{minimum}\end{cases}$ en un réel a si en ce réel la dérivée de f s'annule et si f' change de signe de part et d'autre de a en passant du signe $\begin{cases}+\\ -\end{cases}$ au signe $\begin{cases}-\\ +\end{cases}$

5.2 Théorie qui découle des 2 exemples de la page 2

Rappelons-nous que la pente de la tangente en un point d'abscisse a est $f'(a)$ c-à-d le nombre dérivé de f en a. C'est pourquoi il est fait mention des pentes des tangentes en les différents points de G_f qui sont positives si f est croissante et négatives si f est décroissante. Tracez-en quelques-unes pour le constater.

5.3 Exercices p4

1.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
Signe f'		+	0	+	0	—	
Variation f		↗		↗	Max	↘	

Donc f est croissante sur $]-\infty\,;3]$ et décroissante sur $[3\,;+\infty[$

f admet un maximum en $x = 3$

Attention $f'(1) = 0$ mais le signe de f' ne change pas de part et d'autre de 1 donc il n'y a pas de max ni de mini.
La tangente en $x = 1$ au graphe de f est horizontale
(comme la tangente en $x = 0$ au graphique de $f(x) = x^3$)

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
Signe f'		+	0	—	0	+	
Variation f		↗	Max	↘	min	↗	

Donc f est croissante sur $]-\infty\,;0] \cup [5\,;+\infty[$

f est décroissante sur $[0\,;5]$

f admet un maximum en $x = 0$ et un mini en $x = 5$

x	$-\infty$		-2		1		5		$+\infty$
Signe f'		—	$\nexists$	—	0	+	$\nexists$	+	
Variation f	AH $y = 1$	↘	AV $x = 2$	↘	min	↗	AV $x = 5$	↗	AH $y = 2$

Donc f est croissante sur $[1\,;5[\cup]5\,;+\infty[$

f est décroissante sur $]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;1]$

f admet un minimum en $x = 1$

2.

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
Signe f'_1		$+$	0	$+$	0	$-$	
Variation f_1		↗		↗ Max		↘	

C'est donc le graphique C qui correspond au tableau car c'est le seul qui admet un unique maximum

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe f'_2		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variat° f_2		↘	min	↗	Max	↘	

C'est le graphique A qui correspond car le graphique présente un min en $x=0$ et un max en $x=2$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signe f'_3		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation f_3		↘	$\min_1$	↗	Max	↘	$\min_2$	↗	

C'est donc le graphique B qui correspond car le gr. de f_3 admet un max. en $x=0$ et deux minima en $x=-2$ et $x=2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
Signe f'_4		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variat° f_4		↗	Max	↘	min	↗	

C'est donc le graphique D qui correspond.

3. On note A, B, C, D les 4 graphiques
Etablissons le tableau de signe de chacune des 4 fonctions dérivées et déduisons-en les variations des fonctions.

$g_1(x) = -1$

x	
Signe g_1	$-$
Variation f_1	↘

donc c'est le graphe D qui correspond à g_1

$g_2(x) = 6x - 3x^2$
$= 3x(2-x)$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
Signe g_2		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variation f_2		↘	min	↗	Max	↘	

(signe de ax^2+bx+c avec $a<0$ et $\Delta>0$)

C'est le graphe A qui correspond à g_2.

$g_3(x) = 2x - 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe g_3		$-$	0	$+$	
Variation f_3		↘	min	↗	

Signe $mx+p$ avec $m>0$.

C'est le graphe C qui correspond à g_3

$g_4(x) = -2x$

x		0	
Signe g_4	$+$	0	$-$
Variation f_4	↗	Max	↘

(signe de $mx+p$ avec $m<0$)

c'est le graphe B qui correspond à g_4.

4. Pour déterminer les variations de f il faut calculer la dérivée de f (f') puis étudier son signe et en déduire la croissance et la décroissance de f.

1) $h_1(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

$h'_1(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3)$

$h'_1(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Delta = 16$ donc $x_1 = \frac{2+4}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{2-4}{2} = -1$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
Signe h'_1		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variation h_1		$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Pour calculer l'ordonnée du max., il faut calculer $h_1(-1)$ en remplaçant x par -1 dans $h_1(x)$

$h_1(-1) = (-1)^3 - 3.(-1)^2 - 9(-1) + 1 = \cancel{-1} - 3 + 9 + \cancel{1} = 6$

donc max. $(-1 ; 6)$

Idem pour le min.

$h_1(3) = 3^3 - 3.3^2 - 9.3 + 1 = \cancel{27} - \cancel{27} - 27 + 1 = -26$

donc min $(3 ; -26)$

2) $h_2(x) = (x+1).(x-1)^3$ $\qquad \underline{R} : (f.g)' = f'.g + f.g'$

$h'_2(x) = (x+1).\left[(x-1)^3\right]' + (x+1)'.(x-1)^3$

$= (x+1).3(x-1)^2.1 + 1.(x-1)^3$

$= (x-1)^2.\left[3(x+1) + (x-1)\right]$ $\qquad$ FACTORISER car dérivée du 3^e degré.

$= (x-1)^2.(3x + 3 + x - 1)$

$= (x-1)^2(4x+2)$

$h'_2(x) = 0 \iff x = 1$ ou $4x + 2 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	$+$	$+$	0	$+$	
$(4x+2)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
Signe h'_2		$-$	0	$+$	0	$+$	
Variation h_2		$\searrow$	min	$\nearrow$		$\nearrow$	

$h_2(-\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} - 1)(\frac{1}{2} - 1)^3 = -\frac{1}{2}.\frac{-1}{8} = \frac{1}{16}$ donc min $(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{16})$

3) A vous ! ⚠ dom $h_3 = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Solution : $h_3'(x) = \dfrac{x^2-4x}{(x-2)^2}$ CE : $x \neq 2$

$h_3'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 4$

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
x^2-4x		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$(x-2)^2$		$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	
Signe h_3'		$+$	0	$-$	$\not\exists$	$-$	0	$+$	
Variation h_3		$\nearrow$	Max	$\searrow$	A.V	$\searrow$	mini	$\nearrow$	

$h_3(0) = \dfrac{0-0+10}{0-2} = -5$ donc Max $(0;-5)$

$h_3(4) = \dfrac{4^2-5.4+10}{4-2} = \dfrac{6}{2} = 3$ donc mini $(4;3)$

4) $h_4(x) = \dfrac{10x}{x^2+1}$ dom $h_4 = \mathbb{R}$ car $x^2+1 > 0$.

$h_4'(x) = \dfrac{-10(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ A faire !

Etudiez le signe de h_4' et déduisez-en les variations de h_4. Vérifiez avec Geogebra !

---

5. Nous avons vu dans les exemples introductifs de la théorie du paragraphe 4 (page 2 a)) que la vitesse instantanée d'un mobile à l'instant t_0 s'obtient en dérivant la fonction espace parcouru (t) et en calculant $e(t_0)$.
Pour cet exercice, il s'agit de calculer $e_1'(t)$ et $e_2'(t)$ et d'égaler ces 2 fonctions. Nous aurons une équation en l'inconnue t qui nous donnera, en la résolvant, le moment où les 2 particules ont la même vitesse.

$e_1'(t) = \frac{1}{2} \cdot 2t - 2 = t - 2$ $\qquad e_2'(t) = -2t + 3$

Equation : $t - 2 = -2t + 3$

$3t = 5$

$t = \frac{5}{3}$ Donc après $\frac{5}{3}$ sec les 2 particules ont la même vitesse.

6. A vous !

7. $\Delta C = C(10) - C(9)$

$$= 500.\left(0{,}1.\ 10^3 - 3.10^2 + 50.\ 10\right) + 150\,000$$
$$- \left[500\left(0{,}1.9^3 - 3.9^2 + 50.\ 9\right) + 150\,000\right]$$

$$= 10\,050$$

$$C'(x) = 500.\left(0{,}1.3x^2 - 6x + 50\right) \Rightarrow C'(9) = 500\left(0{,}3.9^2 - 6.9 + 50\right)$$
$$= 10\,150$$

Coût marginal

En calculant ΔC, le coût de la 10^e tonne produite est de 10050€ alors qu'en calculant $C'(9)$ celui-ci est de 10150€. ce qui fait à l'échelle des nombres une petite différence de 100 €.

8. A vous !

Il faut dériver la fonction $b(x) = 5.\left(275 - x - \frac{22500}{x+50}\right)$, étudier le signe de $b'(x)$, déduire les extrema et désigner le maximum de $b(x)$

Solution : $b'(x) = \frac{-5.\left(x^2 + 100x + 25000\right)}{(x+50)^2}$ $\quad (x \geq 0)$

Le bénéfice est max si la prod. est de 100 tonnes

9. A vous !

La fonction bénéfice $b(x)$ est donnée par $\underbrace{3000x}_{\text{prix de vente}} - \underbrace{C(x)}_{\text{coût de la prod.}}$ $(x \geq 0)$

donc il faut dériver $b(x) = 3000x - 10x^3 + 900x^2 + 45000x - 300000$
$$= -10x^3 + 900x^2 + 48000x - 300\,000 \quad (x \geq 0)$$

puis étudier le signe de $b'(x)$ et déduire le max. de $b(x)$

Solution : $b'(x) = -30x^2 + 1800x + 48\,000$

Le bénéfice est max si la prod. est de 80 tonnes.